Teil II : ELEKTRODYNAMIK

0. Einleitung
1. Mathematische Grundlagen
2. Grundlagen der Elektrodynamik – Maxwell-Gleichungen
3. Elektrostatik
4. Magnetostatik
5. Elektrodynamik
6. Anwendung: Optik
7. Relativ. Formulierung

(3.–6.: Konsequenzen / Spezialfälle aus 2.)

0. Einleitung

weitere physikal. Eigenschaft von Teilchen: Ladung
weitere fundamentale Wechselwirkung: Coulomb-Kraft zwischen Ladungen

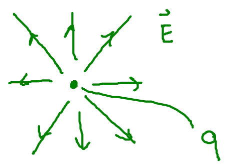
Elektrodynamik: behandelt allgemein
- elektrische Ladungen und Ladungsverteilungen, die sich auch in Raum & Zeit bewegen können
- elektromagnetische Felder, die von elektrischen Ladungen erzeugt werden und wieder auf Ladungen Kraftwirkungen ausüben können

"PHYSIK VON ELEKTROMAGNETISCHEN KRÄFTEN"

Maxwell-Theorie, im klassischen Rahmen vollständig und als Konzept / Theorie umfassend bekannt

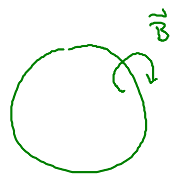
Maxwell-Gleichungen ohne tiefere Motivation, im Vakuum

(1) $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho$



$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t)$: elektrisches Feld
$\varrho = \varrho(\vec{r},t)$: Ladungsverteilung
elektrisches Feld wird erzeugt durch Ladungsverteilung

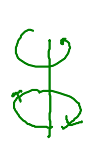
(2) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$



Magnetisches Feld quellfrei,
es gibt keine magnetischen Ladungen / Monopole
$\vec{B} = B(\vec{r},t)$: magnetisches Feld

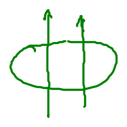
(3) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$

elektrisches Feld auch durch zeitabhängiges Magnetfeld erzeugbar



(4) $\operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{j}$

Magnetische Feld erzeugbar durch zeitabhängige elektrische Felder und fließende Ladungen / Ströme $\vec{j}$



Spezialfälle:

$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ zeitunabhängig

$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ zeitunabhängig

$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$, $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ } Elektrostatik

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ } Magnetostatik

} $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Felder entkoppelt

allgemein zeitabhängige Prozesse

– Verkopplung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$

$\operatorname{rot} \vec{E} \sim -\partial_t \vec{B}$ Faradaysches Induktionsgesetz

$\operatorname{rot} \vec{B} \sim \partial_t \vec{E}$ Maxwellscher Verschiebestrom

Erzeuger von Feldern: Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$, Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$

Maxwell-Gleichungen auch in Materie gültig → durch Mittelungsprozedur über atomistische Betrachtungen "mittlere Felder" herleitbar

Literatur:

J.D. Jackson: Klassische Elektrodynamik, de Gruyter 1964 – 2010

W. Greiner: Theoret. Physik Bd 3

online erhältlich → W. Nolting: Grundkurs Theoret. Physik 3

P. Reinecke et al: Theoret. Physik II, Elektrodynamik 2006

E. Rebhan: Theoret. Physik: Elektrodynamik 2007

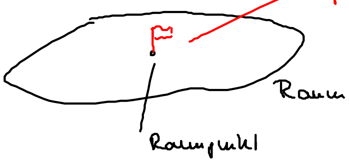
1 Mathematische Grundlagen

mehr mathem. Handwerkzeug notwendig

- mod. math. Felder
- Vektoranalysis
- Integralsätze
- "Delta"-Funktion
- Lösung von elementaren, linearen Feldgleichungen

HA: Wiederholen von Vektoralgebra, grad, div, rot, ε-Tensor & Rechenregeln

1.1. Feldbegriff



physikal. Eigenschaft

Variiert von Raumpunkt zu Raumpunkt i.Allg. auch mit der Zeit

$G \subset \mathbb{R}^3$ Gebiet vom 3d Raum

$T \subset \mathbb{R}$ Zeitachse

$$G \times T \to \mathbb{R}^n \text{ oder } \mathbb{C}^n$$

$$(\vec{r},t) \overset{\Psi}{\mapsto} \Psi(\vec{r},t) = \{\psi_i(\vec{r},t)\}_{i=1}^{n}$$

Feldpunkt, Aufpunkt.   Feldamplituden ψ_i

Ψ : Feld

Ψ statisches Feld wenn $\Psi = \Psi(\vec r, \cancel{t}) = \Psi(\vec r)$

Skalarfeld, Vektorfeld, Tensorfeld

1.2. Ableitungen (t festgehalten, nur räumliche Ableitungen betrachten)

5 wesentliche Ableitungskonstruktionen

Gradient, Divergenz, Rotation, Vektorgradient, Laplace Operator

a) Gradient

Skalarfeld $\phi(\vec r)$

Gradient von $\phi(\vec r)$ im Punkt $\vec r$, $\quad \mathrm{grad}\,\phi(\vec r) = \nabla\phi(\vec r)$

$\vec e$: beliebig gerichteter Einheitsvektor

$$\vec e \cdot \mathrm{grad}\,\phi(\vec r) = \vec e \cdot \nabla \phi(\vec r) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\phi(\vec r + \varepsilon \vec e) - \phi(\vec r)\right]$$

$$\nabla = \partial_i \vec e_i = \vec e_i \partial_i \qquad (\text{Summenkonvention})$$

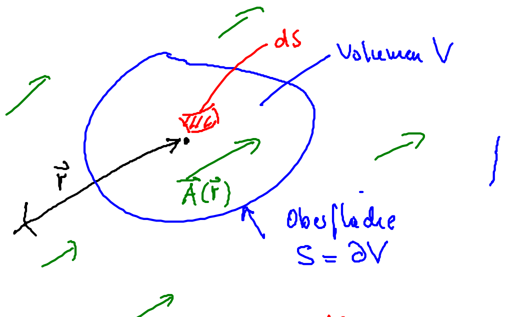
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec r} = \partial_{\vec r} \qquad \vec r = (x_1, x_2, x_3) = x_i \vec e_i$$

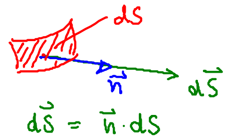
$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \vec r} = \partial_{\vec r}\phi = (\partial_{x_1}\phi, \partial_{x_2}\phi, \partial_{x_3}\phi)$$

b) Divergenz

Vektorfeld $\vec A(\vec r)$

- beliebiges, einfach zusammenhängendes 3d Volumen,
- das Punkt $\vec r$ enthält
- von geschlossener Oberfläche $S = \partial V$ umrandet ist
- für $V \to 0$ schrumpft Volumen auf $\vec r$





Flächenelement dS von Oberfläche S

$\vec n$: Normalenvektor auf dS, nach außen gerichtet (aus V heraus)

$\Rightarrow$ orientiertes Flächenelement $d\vec S = \vec n \cdot dS$

Divergenz / Quellstärke von Vektorfeld $\vec A(\vec r)$ im Punkt $\vec r$

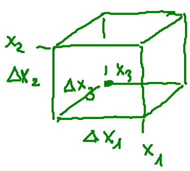
$$\mathrm{div}\,\vec A(\vec r) := \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec A \cdot d\vec S$$

„Koordinatenfreie" Definition der Divergenz

Zusammenhang mit früherer Definition von div ?

speziell kartesische Koordinaten wählen

wähle Quader mit Kanten parallel zu x_1, x_2, x_3 - Richtung mit Kantenlängen $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$



$\oint \vec A \cdot d\vec S$ besteht aus 6 Flächen

S

$$\left.\begin{array}{l}\Delta S_3 := \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \\ \Delta S_2 := \Delta x_1 \Delta x_3 \\ \Delta S_1 := \Delta x_2 \Delta x_3\end{array}\right\} \text{ mit Normalenvektor in } \left\{\begin{array}{l}\pm x_3 \\ \pm x_2 \\ \pm x_1\end{array}\right\} \text{ Richtung}$$

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \left[A_1(x_1+\Delta x_1, x_2, x_3) - A_1(x_1,x_2,x_3)\right]\Delta S_1$$
$$+ \left[A_2(x_1,x_2+\Delta x_2,x_3) - A_2(x_1,x_2,x_3)\right]\Delta S_2$$
$$+ \left[A_3(x_1,x_2,x_3+\Delta x_3) - A_3(x_1,x_2,x_3)\right]\Delta S_3$$

Taylor $\rightarrow$

$$= (\partial_1 A_1)\,\Delta x_1\,\Delta S_1 + (\partial_2 A_2)\,\Delta x_2\,\Delta S_2 + (\partial_3 A_3)\,\Delta x_3\,\Delta S_3$$

$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$= (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3)\,\Delta V$$

$\Delta x_1 \Delta S_1 = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = \Delta V$ = Quadervolumen

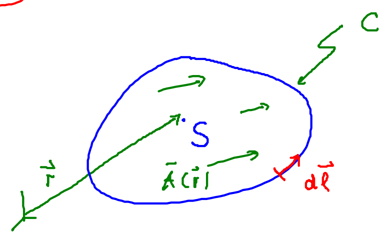
analog für $\Delta x_2 \Delta S_2$, $\Delta x_3 \Delta S_3$

$$\frac{1}{\Delta V}\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} \simeq \partial_i A_i \quad \leftarrow \text{Summenkonvention!}$$

frühere Def aus Physik 1

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \partial_i A_i = \operatorname{div}\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A} \qquad \boxtimes$$

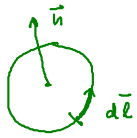
c) Rotation



Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

beliebige, orientierte einfach zusammenhängende Fläche S,

- die Punkt $\vec{r}$ enthält
- geschlossene Randkurve C umschließt S, wobei Länge von $C \to 0$ wenn $S \to 0$
- $d\vec{\ell}$ Linienelement längs C
- $\vec{n}$: Flächennormale im Punkt $\vec{r}$
- $\vec{n}$ so orientiert, daß $\vec{n}$ und orientiertes Linienelement $d\vec{\ell}$ RECHTSSCHRAUBE bilden (Konvention)



Rotation von $\vec{A}(\vec{r})$ in $\vec{r}$

$$\vec{n}\cdot \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_C \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{\ell}$$

Nachweis, dass identisch mit früherer Definition von $\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \vec{e}_i\cdot\varepsilon_{ijk}\,\partial_j A_k$$
$$\left[\operatorname{rot}\vec{A}\right]_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j A_k$$

$\rightarrow$ Übungen.

Interpretation von $\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})$ als Wirbelstärke

d) Vektorgradient

Vektorfeld $\vec{B}(\vec{r})$

Vektor $\vec{a}$

$$\vec{a}\cdot\nabla\,\vec{B}(\vec{r}) = (\vec{a}\cdot\nabla)\,\vec{B}(\vec{r}) =: \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\vec{B}(\vec{r}+\varepsilon\vec{a}) - \vec{B}(\vec{r})\right]$$

in kart. Koordinaten

$$(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{B}(\vec{r}) = \sum_{i,k=1}^{3} a_i \frac{\partial B_k}{\partial x_i}\vec{e}_k = a_i \partial_i B_k \vec{e}_k$$

$$= \left(a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right) B_k \vec{e}_k$$

(vgl. Physik 1, Euler, Navier-Stokes Gl. HD $(\partial_t + \vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \ldots$)

e) Laplace Operator

$\phi(\vec{r})$ Skalarfeld

$$\Delta\phi(\vec{r}) = \text{div grad } \phi(\vec{r}) = \nabla^2\phi(\vec{r})$$

kartesische Koordinate

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = \partial_i^2 \quad (\text{Summenkonv.})$$

nochmals einige wichtige Rechenregeln

- $\text{div}\,\vec{r} = 3$
  $\text{rot}\,\vec{r} = 0$
- $r = |\vec{r}| \longrightarrow \nabla r = \text{grad}\, r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r$ Einheitsvektor in $\vec{r}$-Richtg
- $\nabla\phi(r) = \phi'(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r} = (\partial_r\phi(r))\frac{\vec{r}}{r}$

nur von $|\vec{r}|$ abhängig

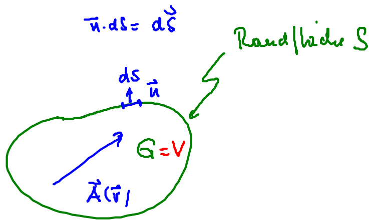
- $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$!!!
- $\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

  Abl. bzgl $\vec{r}$ Abl. bzgl $\vec{r}'$
- $\nabla(\phi\psi) =$
  $\text{div}(\phi\vec{A}) =$
  $\text{rot}(\phi\vec{A}) =$
  $\text{div}(\vec{A}\times\vec{B}) =$
  $\text{rot}(\vec{A}\times\vec{B}) =$
  $\text{grad}(\vec{A}\cdot\vec{B}) =$
- $\phi(\vec{r})$ beliebig $\Rightarrow$ rot grad $\phi = 0$
  $\vec{A}(\vec{r})$ beliebig $\Rightarrow$ div rot $\vec{A} = 0$

  $\vec{A} = \nabla\phi, \ \vec{B} = \nabla\psi$

  $\text{div}(\nabla\phi\times\nabla\psi) = 0$
- $\text{rot rot}\,\vec{A}(\vec{r}) = \text{grad div}\,\vec{A}(\vec{r}) - \nabla^2\vec{A}(\vec{r})$
  $\nabla^2\vec{A} = (\nabla^2 A_i)\,\vec{e}_i$

1.3 Integralsätze



a) Gaußscher Satz

- zusammenhängendes Gebiet des 3d Raums mit stückweise glatter Randfläche S
- Vektorfeld $\vec A(\vec r)$ mit Komponenten $A_i(\vec r)$ stetig diff bzgl. x_1, x_2, x_3

$$\int_V \mathrm{div}\, \vec A(\vec r)\, dV = \oint_{S=\partial V} \vec A \cdot d\vec S \qquad \text{(Gaußscher Satz)}$$

vgl. mit Hauptsatz der Diff.+ Integralrechnung

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{df}{dx} \cdot dx = f(x_b) - f(x_a) = f \Big|_{x_a}^{x_b}$$

Nachweis:

$$dV = dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$\int_G \mathrm{div}\, \vec A \cdot dV = \int (\partial_1 A_1)\, dx_1 dx_2 dx_3 + \int (\partial_2 A_2)\, dx_1 dx_2 dx_3 + \int (\partial_3 A_3)\, dx_1 dx_2 dx_3$$

Ausintegrieren von $(\partial_1 A_1)\, dx_1$, $(\partial_2 A_2)\, dx_2$, $(\partial_3 A_3)\, dx_3$

$$= \int A_1 \Big|_{x_{1a}(x_2,x_3)}^{x_{1b}(x_2,x_3)} dx_2\, dx_3 + \int A_2 \Big|_{x_{2a}(x_1,x_3)}^{x_{2b}(x_1,x_3)} dx_1\, dx_3 + \int A_3 \Big|_{x_{3a}(x_1,x_2)}^{x_{3b}(x_1,x_2)} dx_1\, dx_2$$

$$= \int_S \vec A \cdot d\vec S$$

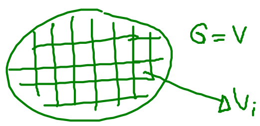
insgesamt so integrieren, daß Gesamtheit aller Punkte

$x_{1a}(x_2,x_3)$, $x_{2a}(x_1,x_3)$, $x_{3a}(x_1,x_2)$ und

$x_{1b}(x_2,x_3)$, $x_{2b}(x_1,x_3)$, $x_{3b}(x_1,x_2)$

die gesamte Oberfläche erfaßt werden

ausschließlich:



$G=V$ in kleine Volumina ΔV_i zerlegen mit Randfläche ΔS_i $\quad i = 1, .., N$

$$\mathrm{div}\, \vec A(\vec r_i) \cdot \Delta V_i = \oint_{\Delta S_i} A(\vec r_i) \cdot d\vec S_i \qquad \leftarrow \text{wg Def von div.}$$

$\vec r_i$ ein in ΔV_i liegender Punkt

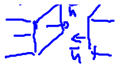
Gauß via Aufintegration = Summation

$$\Delta V_i \to 0$$
$$N \to \infty$$

$$\int \mathrm{div}\, \vec A(\vec r)\, dV = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{div}\, \vec A(\vec r_i)\, \Delta V_i$$

G

$$= \lim_{\substack{\Delta V_i \to 0 \\ N\to\infty}} \sum_{i=1}^{N} \oint_{\Delta S_i} \vec A(\vec r_i)\cdot d\vec S_i$$



$$= \oint_S \vec A(\vec r)\cdot d\vec S$$

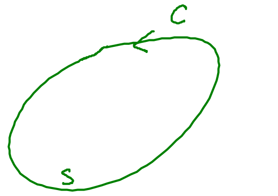
ΔS_i intern kompensieren sich, nur ΔS_i an Oberfläche von V relevant

$- \begin{array}{l}\Delta V_i \to 0 \\ N \to \infty\end{array} \Big\}$ Konv. beweis $\to$ Mathe.

b) Stokesscher Satz:

zusammenhängende glatte Fläche S im Gebiet G
mit stückweise glatter Randkurve C

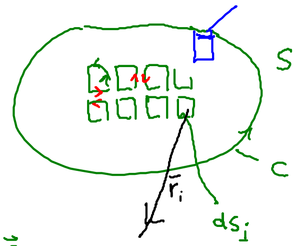
stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec A(\vec r)$



$$\int_S \text{rot}\,\vec A\cdot d\vec S = \oint_C \vec A\cdot d\vec \ell$$

C: Rechtsschraube

Nachweis:



Zerlege Fläche S in Teilflächen ΔS_i
mit Randkurven ΔC_i, $i = 1, \dots N$

für jedes ΔS_i gilt (näherungsweise)

$$\text{rot}\,\vec A(\vec r_i)\,\Delta S_i = \int_{\Delta C_i} \vec A(\vec r_i)\cdot d\vec S_i$$

Summieren über alle S_i
$\Delta S_i \to 0$, $N \to \infty$

Beiträge aller S nicht berandenden Randelemente ΔC_i
heben sich paarweise weg

$\to$ Konv. Mathe ähnlich Riemann Integral

Zusammenfassung und Verallgemeinerung

1d $\quad f = f(x) \to \int_a^b \frac{df}{dx}\,dx = f(b) - f(a)$

3d $\quad \psi = \psi(\vec r) \to \int_a^b \nabla\psi\cdot d\vec r = \psi(b) - \psi(a)$

Skalarfeld

$$\oint_C \nabla\psi\cdot d\vec r = 0$$

Gaußscher Satz + Varianten

$$\int_V \nabla\psi\, dV = \oint_{S(V)} \psi\, d\vec S$$

$$\int_V \vec\nabla\cdot\vec A\, dV = \oint_{S(V)} \vec A\cdot d\vec S$$

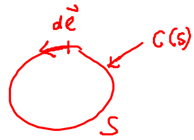
Standard Gaußscher Satz

$$\int_V \vec\nabla\times\vec A\, dV = -\oint_{S(V)} \vec A\times d\vec S \qquad (*)$$

Stokesscher Satz + Varianten

$$\int_S \nabla\psi\times d\vec S = -\oint_{C(S)} \psi\, d\vec\ell$$

$$\int_S \vec\nabla\times\vec A\cdot d\vec S = \oint_{C(S)} \vec A\cdot d\vec\ell$$



$$\int_S \left(d\vec{s} \times \vec{\nabla}\right) \times \vec{A} = -\oint_{C(S)} \vec{A} \times d\vec{\ell}$$

Nachweis von ⊗

Konst. Hilfsvektor $\vec{B}$

$$\mathrm{div}\,(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla \times \vec{A}) - \vec{A}\cdot\underbrace{(\nabla \times \vec{B})}_{=0} = \vec{B}\cdot(\nabla \times \vec{A})$$

Anwenden von Gauß'schen Satz auf Vektorfeld $\vec{A} \times \vec{B}$

$$\vec{B}\cdot\int_V \mathrm{rot}\,\vec{A}\, dV = \int_V \vec{B}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{A}\, dV$$

$$= \int_V \mathrm{div}\,(\vec{A}\times\vec{B})\, dV$$

Gauß

$$= \oint_S (\vec{A}\times\vec{B})\cdot d\vec{s}$$

$$= \oint_S (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{n}\; ds$$

zykl. Invarianz von Spatprod + $\vec{B}$ = konst

$$= \vec{B}\cdot\oint_S (\vec{n}\times\vec{A})\, ds$$

$$\Rightarrow \vec{B}\cdot\left[\int_V \mathrm{rot}\,\vec{A}\, dV - \oint_S (\vec{n}\times\vec{A})\, ds\right] = 0$$

$\vec{B} \neq 0$, $\vec{B}$ = konst $\Rightarrow [\ldots] = 0$ ☒

c) Greensche Formeln

Zusammenhang zw. Volumenintegralen von Feldern mit Oberflächenintegralen über Normalableitungen

Skalarfelder $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ mit stetigen ersten Ableitungen

$$\vec{A} = \phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi$$

Greensche Identitäten

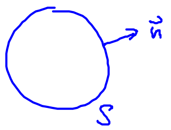
Normalenableitungen

$$\int_V \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right) dV = \oint_{S(V)} \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) ds \qquad (1)$$

$$\int_V (\nabla\phi)^2\, dV + \int \phi\nabla^2\phi\; dV = \oint_S \phi\,\frac{\partial\phi}{\partial n}\, ds \qquad (2)$$

Normalenableitung $\qquad \dfrac{\partial\phi}{\partial n} = \vec{n}\cdot\nabla\phi$

$\vec{n}(\vec{r})$



Nachweis von (1)

$$\mathrm{div}\,(\phi\nabla\psi) = (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) + \phi\nabla^2\psi$$

$$\mathrm{div}\,(\psi\nabla\phi) = (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) + \psi\nabla^2\phi$$

$$\mathrm{div}\,(\underbrace{\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi}_{=\vec{A}}) = \phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi \qquad \leftarrow$$

mit Gauß

$$\int_V \mathrm{div}\,\vec{A}\, dV = \int_V \mathrm{div}\,(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)$$

$$= \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = \oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\; ds$$

$$\vec{n}\cdot\nabla = \frac{\partial}{\partial n}$$ ☒

Nachweis von (2)

Gauß Satz mit $\vec{A}$ $\phi\nabla\phi$

Gaußscher Satz mit $\vec{A} = \phi \nabla \phi$

$$\mathrm{div}(\phi \nabla \phi) = (\nabla \phi)^2 + \phi \nabla^2 \phi \rightarrow$$

analog zu (1) ☑

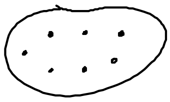
Konsequenz aus (1)

$$\phi = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_V \nabla^2 \psi \, dV = \oint_{S(V)} dS \, \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

Volumenintegral über Laplace Op

↑ Oberflächenintegral über Normalableitung von ψ bei $S(V)$

1.4. Diracsche δ - "Funktion"


$\longrightarrow \varrho(\vec{r})$? Dichte

diskrete Punkte (Punktmassen, Punktladungen) $\longrightarrow$ Kontinuumsbeschreibung

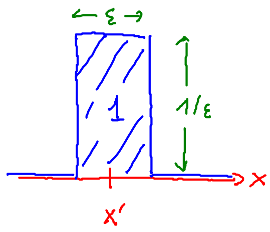
erweitertes Funktionskonzept $\longrightarrow$ "Distributionen" $\longrightarrow$ elementarer Teil

Dirac δ - "Funktion" (1930)

a) eine Raumdimension

definiere Stufenfunktion

$$\delta_S(x, x', \varepsilon) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } |x-x'| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \ |x-x'| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$



zentrierte Säule mit Breite ε, Höhe $1/\varepsilon$ bei x'

Fläche unter δ_S normiert auf 1 !

betrachte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \delta_S(x, x', \varepsilon) \, dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{x'-\frac{\varepsilon}{2}}^{x'+\frac{\varepsilon}{2}} f(x) \, dx = \bar{f}$$

Grenzfall $\varepsilon \to 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{f} = f(x')$ = Wert von f bei x'

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \delta_S(x, x', \varepsilon) \, dx = f(x')$$

Definition von δ - "Funktion"

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \delta_S(x, x', \varepsilon) \, dx =: \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \delta(x-x') \, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \delta(x-x') \, dx = f(x')}$$

Definition von δ "Fkt"

$\rightarrow x' = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \delta(x) \, dx = f(0)$

x'

"Interpretation" $\delta(x-x') = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x' \\ \text{"}\infty\text{"} & \ x = x' \end{cases}$ Vorsicht !

δ-Fkt sollte nur im Zusammenhang mit Überintegration für konkrete Rechnungen benutzt werden.

Eigenschaften der δ - "Funktion" (vgl. Übungen)

1) $\int^{+\varepsilon} \delta(ax) \, dx = \frac{1}{} \, \delta(x)$

1) $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(ax)\,dx = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

Substitutionsregel anwenden $u = ax$

2) $f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x')\,dx = 1$ Normiertheit.

3) allg. $u = f(x)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f(x))\,dx = \sum_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \delta\left(f'(x_i)(x-x_i)\right)dx$

x_i Nullstelle von $f(x)$

b) drei Raumdimensionen

„ $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \begin{cases} 0 & \text{falls } \vec{r} \neq \vec{r}\,' \\ \infty & \vec{r} = \vec{r}\,' \end{cases}$ " „Baby Interpretation"

formal korrekt:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,d^3r' := f(\vec{r}) \quad = \text{Integraldarstellung von } f(\vec{r})$$

gesamter Raum

$$\vec{r}\,' \to \vec{r}: \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,d^3r = f(\vec{r}\,')$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z')$$

$$\vec{r} = (x,y,z), \quad \vec{r}\,' = (x',y',z')$$

explizites Ausrechnen

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,d^3r'$$

$$= \iiint_{-\infty}^{+\infty} dx'\,dy'\,dz'\; f(x',y',z')\,\delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z')$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} dx'\,dy'\;\delta(x-x')\,\delta(y-y')\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dz'\, f(x',y',z')\,\delta(z-z')}_{=f(x',y',z)}$$

$\vdots$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\,\delta(x-x')\,f(x',y,z)$$

$$= f(x,y,z) \equiv f(\vec{r})$$

3d Fall rückführbar auf 1d Fall.

in ED wichtiges Vektorfeld

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$ (später Potential von Punktladung in $\vec{r}\,'$)

Berechnung von $\nabla^2\phi(\vec{r})$

transformiere $\vec{r}\,' \to 0 \Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{r}$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\,\partial_r^2\left(r\cdot\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\cdot\partial_r^2\, 1 = 0 \quad \text{für } r \neq 0$$

Kugelkoord. vgl. Wb. Physik 1

für $r = 0$ Rechnung nicht definiert

alternativ

$$\int_V \nabla^2 \frac{1}{r}\, dV = \int_V \operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) dV$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \oint_S \left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{n}\; dS$$

$$= \oint_S \underbrace{\left[\partial_r\left(\frac{1}{r}\right)\right] r^2}_{=-1} \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

Oberfl. element in Kugel Koord.

$$= (-1)\underbrace{\oint \sin\theta\, d\theta\, d\phi}_{=4\pi} = -4\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(\vec{r})} \qquad \forall \vec{r}$$

wg $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$ für $r \neq 0$ & $\int_V \nabla^2 \frac{1}{r}\, dV = -4\pi$ in Kugel um $r = 0$

Falls $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$, Verschiebetransf. $\vec{r} \to \vec{r}-\vec{r}'$

$$\Rightarrow \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

umgekehrt

$$\boxed{\delta(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

Rolle von $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ vertauschen:

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \delta(\vec{r}'-\vec{r})$$

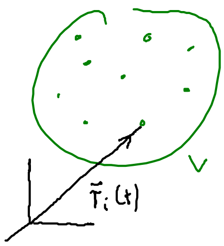
$$= -\frac{1}{4\pi}\nabla'^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Wesentliche Anwendung: diskret $\to$ Kontinuum

Punktteilchen / Punktladungen an diskreten Orten $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_N$
im Prinzip $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t) \quad \forall\, i = 1,..N$

Teilchendichte $\hat{=}$ Feld

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\vec{r}-\vec{r}_i(t))$$



Gesamtzahl:

$$\int_V \rho(\vec{r},t)\, dV = \int_V \sum_{i=1}^{N} \delta(\vec{r}-\vec{r}_i(t))\, dV$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\int_V \delta(\vec{r}-\vec{r}_i(t))\, dV \qquad \vec{r}_i(t) \text{ innerhalb } V$$

$$= \sum_{i=1}^{N} 1 = N$$

für Ladungen:

$$\rho_L(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i(t)) \qquad q_i = \text{Ladung von Teilchen } i$$

$$\int_V \rho_L(\vec{r},t)\, dV = \sum_{i=1}^{N} q_i = Q \qquad \text{Gesamtladung}$$

1.5. Helmholtz-Theorem

In wie weit ist ein Vektorfeld $\vec{F}$ bestimmt durch Ableitungsoperationen wie z.B. div $\vec{F}$ und rot $\vec{F}$? Dabei $\vec{F}$ für $\vec{E}$ oder $\vec{B}$ - Feld.

Annahme:
$$\mathrm{div}\, \vec{F}(\vec{r}) = \nabla\cdot\vec{F}(\vec{r}) = D(\vec{r}) \quad \leftarrow \text{Skalarfeld} \quad (1)$$
$$\mathrm{rot}\, \vec{F}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{F}(\vec{r}) = \vec{C}(\vec{r}) \quad \leftarrow \text{Vektorfeld} \quad (2)$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r}) = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{F}) = 0 \qquad \forall\ \vec{F}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\cdot\vec{C}(\vec{r}) = 0 \quad , \text{ automatisch divergenzfrei}$$

Frage: aus (1) und (2) $\vec{F}(\vec{r})$ konstruierbar?
hier nur statischer Fall, keine t-Abhängigkeit

überprüfen, dass $\vec{F}$ mit (1) und (2) Lösung besitzt und diese eindeutig ist.

Existenz: Explizite Konstruktion der Lösung

Ansatz:
$$\vec{F} = -\nabla u + \nabla\times\vec{w}$$
$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{D(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r'$$
$$\vec{w}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{C}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r'$$

V: gesamter Raum
$V = \mathbb{R}^3$

Was ergibt sich für div $\vec{F}$ und rot $\vec{F}$

$$\nabla\cdot\vec{F} = -\nabla^2 u + \underbrace{\nabla\cdot(\nabla\times\vec{w})}_{=0} = -\nabla^2 u$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\int D(\vec{r}\,')\cdot\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) d^3r'$$
$$= +\frac{1}{4\pi}\int D(\vec{r}\,')\ 4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\, d^3r'$$
$$= D(\vec{r})$$

$$\nabla\times\vec{F} = -\underbrace{\nabla\times\nabla u}_{=0\ (\text{rot grad.}=0)} + \nabla\times(\nabla\times\vec{w})$$
$$= -\nabla^2\vec{w} + \nabla(\nabla\cdot\vec{w}) \qquad ;\ \vec{\nabla}=\nabla$$

$$-\nabla^2\vec{w} = -\frac{1}{4\pi}\int_V \vec{C}(\vec{r}\,')\,\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) d^3r'$$
$$= +\frac{1}{4\pi}\int_V \vec{C}(\vec{r}\,')\ 4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\, d^3r'$$
$$= \vec{C}(\vec{r})$$

Nächster Schritt: Zeige, dass $\nabla(\nabla\cdot\vec{w}) = 0$
$$4\pi\,\nabla\cdot\vec{w} = \int_V \vec{C}(\vec{r}\,')\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) d^3r'$$
$$= -\int_V \vec{C}(\vec{r}\,')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) d^3r' \qquad ,\ \nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$
Integrand hat Form $\vec{A}\cdot\nabla'\varphi$

$$\nabla'\cdot[\varphi\vec{A}] = \varphi\,\nabla'\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla'\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}\cdot\nabla'\varphi = \nabla'\cdot[\varphi\vec{A}] - \varphi\,\nabla'\cdot\vec{A}$$

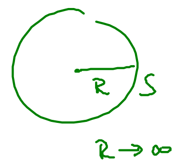
$$\Rightarrow \quad 4\pi\,\nabla\cdot\vec{w} = \underbrace{-\int_V \nabla'\cdot\left[\vec{C}(\vec{r}\,')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] d^3r'}_{= -\oint_S \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\vec{C}(\vec{r}\,')\,d\vec{S}} + \int_V \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\underbrace{\nabla'\cdot\vec{C}(\vec{r}\,')}_{=0\ \text{schon gezeigt.}} d^3r'$$

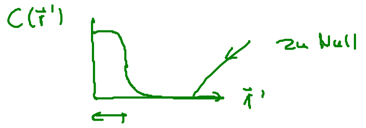
$$\oint_S \frac{\ldots}{|\vec r-\vec r'|} \ldots$$

wann ist $\oint_{S(V)} \ldots = 0$?

V gesamter Raum $\Rightarrow$ S im Unendlich

$C(\vec r')$ lokalisiert auf endl. Raumbereich.





$\Rightarrow \oint_{S(V)} \ldots = 0$

Eindeutigkeit der Lösung

Annahme $D(\vec r)$ und $\vec C(\vec r)$ stärker als mit $\frac{1}{r^2}$ abfallend für $r \to \infty$

$\vec F, \vec f$ mit $\operatorname{div} \vec f = 0$ und $\operatorname{rot} \vec f = 0$

$\vec f(\vec r) \to 0$ für $r \to \infty$

$\vec F \to \vec F' = \vec F + \vec f \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec F' = D, \; \nabla \times \vec F' = C$

$\vec F(\vec r \to \infty) = 0$

Helmholtz Theorem:

$\vec F(\vec r)$

Divergenz + Rotation von $\vec F$ spezifiziert

$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec F(\vec r) \\ \operatorname{rot} \vec F(\vec r) \end{array}\right\}$ stärker als mit $\frac{1}{r^2} \to 0$ für $r \to \infty$

$\vec F(\vec r) \to 0$ für $r \to \infty$

$\Rightarrow$ $\vec F$ eindeutig spezifiziert ist durch $\operatorname{div} \vec F(\vec r)$ und $\operatorname{rot} \vec F(\vec r)$

Folgerung: Zerlegungssatz

Jedes diff.bare Vektorfeld $\vec F(\vec r)$, das schneller als $\frac{1}{r^2}$ zu Null geht für $|\vec r| \to \infty$ kann zerlegt werden in Summe von

1) Gradient von Skalarfeld
2) Rotation von Vektorfeld

$$\vec F(\vec r) = \nabla\left(-\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \vec F(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}\right) d^3r' + \nabla \times \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \vec F(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}\right) d^3r'$$

Nachweis: HA. elementar!

Zwei grundlegende Sätze für die Elektrodynamik

Satz 1: Wirbelfreie Felder

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) $\vec\nabla \times \vec F = 0 \quad \forall \vec r$ $\qquad \vec F$ wirbelfrei

2) $\int_a^b \vec F \cdot d\vec l$ wegunabhängig für vorgegebene Endpunkte

3) $\oint_C \vec F \cdot d\vec l = 0$ für geschlossene Kontur C

4) $\vec F$ ist Gradientenfeld zu Skalarfeld u: $\vec F = -\nabla u$

u : Skalares Potential von $\vec F$, u nicht eindeutig

Satz 2 : Divergenzfreie Felder

Folgende Aussagen sind äquivalent

1) $\nabla\cdot\vec F = 0 \quad \forall \vec r$ $\qquad$ F divergenzfrei

2) $\int_S \vec F\cdot d\vec S$ $\qquad$ unabhängig von Oberfläche bei gegebenem Rand

3) $\oint_S \vec F\cdot d\vec S = 0$ $\qquad$ für geschlossene Oberfläche

4) $\vec F$ ist Rotation eines Vektorfelds $\vec W$: $\vec F = \nabla\times\vec W$

$\vec W$ Vektorpotential von $\vec F$, $\vec W$ nicht eindeutig

Nachweis für wirbelfreie Felder

1) $\Rightarrow$ 3)

$$\operatorname{rot}\vec F = 0 \;\Rightarrow\; \oint_C \vec F\cdot d\vec l \overset{\text{Stokes}}{=} \int_S \operatorname{rot}\vec F\cdot d\vec S = \int_S 0 \, d\vec S = 0$$

3) $\Rightarrow$ 1)

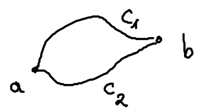
$$\oint_C \vec F\cdot d\vec l = 0$$

Benutze. $\vec n\cdot\operatorname{rot}\vec F = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_C \vec F\cdot d\vec l = 0$

$\vec n$: beliebige Richtung $\Rightarrow$ jede Komp. von $\operatorname{rot}\vec F = 0$
$\Rightarrow$ $\operatorname{rot}\vec F = 0$

3) $\Rightarrow$ 2)

zwei bel. Kurven C_1 und C_2



$$0 = \oint_C \vec F\cdot d\vec l = \int_{C_1}\vec F\cdot d\vec l + \int_{-C_2}\vec F\cdot d\vec l$$
$$= \int_{C_1}\vec F\cdot d\vec l - \int_{C_2}\vec F\cdot d\vec l$$
$$\Rightarrow \int_{C_1}\vec F\cdot d\vec l = \int_{C_2}\vec F\cdot d\vec l$$

C_1, C_2 beliebig, nur a und b gleich
$\rightarrow$ Wegunabhängigkeit

einige nützliche Integralrelationen:

1) $\oint_S d\vec S = \oint_S \vec n\cdot dS = \int_V \operatorname{grad}(1)\, dV = \int_V 0 \, dV \equiv 0$

2) $\int_V \operatorname{div}\vec n \, dV = \oint_{S(V)} \vec n\cdot d\vec S = \oint_{S(V)} \vec n\cdot\vec n\, dS \underset{n^2\equiv 1}{=} \oint dS = S$ $\qquad$ Oberfläche von V

3) $\frac{1}{6}\oint_S \nabla(r^2)\, d\vec S = \frac{1}{6}\int_V 2\cdot\operatorname{div}\vec r \, dV = \frac{1}{\cancel{6}}\cancel{6}\int_V dV = V$ $\qquad$ Volumen V selbst