Freitag, 10. Juni 2011
08:32

2. Grundlagen der Elektrodynamik

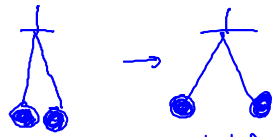
Ladung

Thales v. Milet (625 - 547 v. Chr)

Körper können Eigenschaften ändern, wenn sie an anderen Körpern gerieben werden $\rightarrow$ Reibungselektrizität

Gilbert $\rightarrow$ "corpora electrica"

Bsp.:



abstoßende WW

Konzept:

$\exists$ substanzartige Größe: (elektrische) Ladung Q, die Kraftwirkung verursacht

experimentell: $\exists$ 2 Arten von Ladungen $Q > 0$ oder $Q < 0$

Vorzeichen der Ladung zunächst willkürlich festlegen:

Reiben von Glasstab $\rightarrow$ Stab $Q > 0$

Reiben von Hartgummistab $\rightarrow$ Stab $Q < 0$

Ladung:

1) skalare Größe
2) Ladung Q eigentlich nicht kontinuierlich

$\exists$ kleinste nicht mehr teilbare Elementarladung e

andere Ladungen ganzzahlige Vielfache von e

$$Q = n e \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$n = -1$: Elektron

$n = +1$: Proton

$n = 0$: Neutron

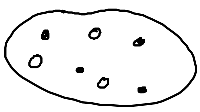
$n = Z$: Atomkern, Z Ordnungszahl

Millikan-Versuch $\rightarrow$ Elementarladung

im Rahmen von ED Q als quasikontinuierlich ansehen

Gesamtladung von Körper

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$



Q: o positiv

• negativ

$$Q = 0 \;\not\Rightarrow\; q_i = 0 \;\; \forall\, i = 1, \dots, n$$

$Q = 0 \Rightarrow$ negative und positive Ladungen kompensieren sich

Ladungserhaltungssatz:

Gesamtladung eines <u>abgeschlossenen</u> Systems unveränderlich

$$Q = \text{konst}$$

Grenzfläche isolierend

$\downarrow$

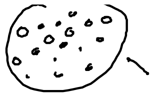
keine spontane Erzeugung von Ladung

$\leftarrow$ Ladungstrennung möglich

Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$

V enthält n_+ positive $\}$ Punktladungen

n_- negative (…)



$$Q = \sum_{i=1}^{N} q_i = (n_+ + n_-)\, e$$

$$\rho = \frac{Q}{V} \neq \rho(\vec{r})$$

andere Auffassung

$$Q = \int_V \rho(\vec{r})\, dV = \int_V \rho(\vec{r})\, d^3r$$

Ladungsdichte von Punktladung

$$\rho(\vec{r}) = q\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

↑ Ladung von Punktladung, die in $\vec{r}_i$ sitzt.

$$Q = \int_V q\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\, d^3r = q \int_V \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\, d^3r = q \quad \text{falls } \vec{r}_i \in V$$

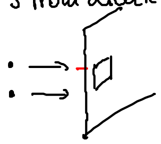
Verallgemeinerung: mehrere Punktladungen $q_1, \dots, q_n$ an Positionen $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} q_i\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

$$Q = \int_V \rho(\vec{r})\, d^3r = \sum_{i=1}^{n} q \int \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\, d^3r = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

Ladungen können sich mit Zeit t bewegen, im Raum verschieben

Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$



$$\frac{\vec{j}}{|\vec{j}|} = \vec{e}_j \qquad \text{in Bewegungsrichtung der Teilchen}$$

$|\vec{j}|$ = Ladung, die pro Zeiteinheit durch Flächeneinheit senkrecht zur Stromrichtung transportiert wird

homogene Verteilung: N Teilchen mit Ladung q in Volumen V
alle haben gleiche Geschwindigkeit $\vec{v}$

$$\Rightarrow \quad \vec{j} = \frac{N}{V} q \vec{v} = n q \vec{v}$$

$$n = \frac{N}{V} = \text{Teilchendichte}$$

Stromstärke

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

I: skalare Größe,

Experimentelle Fakten:

1) WW zwischen Ladungen → Coulombsches Gesetz
2) Superpositionsprinzip für elektr. Felder
3) Ladungserhaltung
4) WW zwischen Strömen → Ampèresches Gesetz
5) Superpositionsprinzip für magnet. Felder

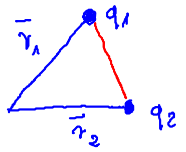
6) Faradaysches Induktionsgesetz

→ Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ und deren "Erzeuger" $\rho, \vec{j}$ definieren
→ Maxwell-Gleichungen begründen.

Coulombsches Gesetz

Kraftwirkung zwischen ruhenden Punktladungen

Zwei Punktladungen q_1 bei $\vec{r}_1$ und q_2 bei $\vec{r}_2$



Wechselwirkungskraft zwischen q_1 und q_2

$$\vec{F}_{12} = k\, q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_{21}$$

$\vec{F}_{12}$: von Ladung q_2 auf Ladung q_1 ausgeübt

$k > 0$

$\vec{F}_{21}$: von Ladung q_1 auf Ladung q_2 ausgeübt

k im Vakuum:
willkürlich wählbar, Wahl von k entscheidet über Einheitensystem

- $k = 1$ → Gauß System
- $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ → SI System $\qquad \varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{A^2 s^2}{N m^2}$
- Ladungseinheit $[q] = 1\,C = 1\,As$

Eigenschaften der Coulombkraft
- gleichartige Ladungen $\mathrm{sgn}(q_1) = \mathrm{sgn}(q_2)$ ⇒ abstoßende Kraft
- verschiedenartige Ladungen $\mathrm{sgn}(q_1) \neq \mathrm{sgn}(q_2)$ ⇒ anziehende Kraft

Superposition von Ladungen:

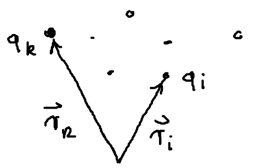
$$\vec{F}(\vec{r}_i) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k \neq i} q_k \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^3}$$

wenn Punktladungen q_k bei $\vec{r}_k$, $k = 1, 2, \dots$

$F(\vec{r}_i)$ WW von Ladung q_i mit anderen Ladungen q_k

Superpositionsprinzip der Kraftwirkungen

statisches elektr. Feld



Coulomb Kraft $\vec{F}(\vec{r}_i)$ =
Kraft auf die Ladung q_i bei $\vec{r}_i$
ausgeübt von allen anderen Ladungen

$$\vec{E}(\vec{r}_i) := \frac{\vec{F}(\vec{r}_i)}{q_i} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k \neq i} q_k \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^3}}_{\text{unabhängig von } q_i}$$

elektrisches Feld der Ladungen $q_k \neq q_i$

$$= \sum_{k \neq i} \vec{E}_k(\vec{r}_i)$$

$$\vec{E}_k(\vec{r}_i) = \frac{q_k}{} \quad \vec{r}_i - \vec{r}_k$$

$$\vec{E}_k(\vec{r}_i) = \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^3}$$

elektrische Feld der Ladung q_k (lokalisiert bei $\vec{r}_k$) am Ort $\vec{r}_i$

$$\vec{E}(\vec{r}_i) = \sum_{k \neq i} E_k(\vec{r}_i)$$

Gesamtkraft auf Ladung q_i in $\vec{r}_i$

$$\vec{F}(\vec{r}_i) = q_i \vec{E}(\vec{r}_i)$$

Position q_i beliebig $\Rightarrow$ $\vec{r}_i$ kann jeder Raumpunkt $\vec{r}$ sein

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{n} q_k \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r})$$

Grundgleichungen von elektrostat. Feld:

Kontinuumsversion:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \varrho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\varrho(\vec{r}) = \sum_k q_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) = \text{Ladungsdichte}$$

Kraftdichten im Punkt $\vec{r}$ erzeugt durch Ladungsdichte $\varrho(\vec{r})$

$$\vec{f}(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \text{Kraftdichte im Punkt } \vec{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \varrho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \nabla_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \varrho(\vec{r}') \left[-\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} (-\nabla_{\vec{r}}) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\text{(skalares) elektrisches Potential: } \varphi(\vec{r})}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla_{\vec{r}} \varphi(\vec{r}) = -\nabla \varphi(\vec{r})$$

$\Rightarrow$ statisches elektrisches Feld ist reines Gradientenfeld ableitbar aus Feld $\varphi(\vec{r})$

$\Rightarrow$ Feldlinien $\perp$ Äquipotentialflächen von $\varphi(\vec{r})$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \varphi(\vec{r})$$

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \times \nabla \varphi(\vec{r}) = 0$$

$\Rightarrow$ statisches elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$ ist wirbelfrei, $\text{rot } \vec{E} = 0$

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

$$= \nabla_{\vec{r}} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \varrho(\vec{r}') \left[-\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

$$= \nabla_{\vec r} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} \ldots \left[\ldots \frac{\vec r \ldots}{|\vec r-\vec r'|}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \rho(\vec r') \underbrace{\left[-\nabla_{\vec r}^2 \frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\right]}_{=4\pi\,\delta(\vec r-\vec r')}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \rho(\vec r')\, \delta(\vec r-\vec r')$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec r)$$

Grundgleichungen der Elektrostatik

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec E &= 0 \\ \operatorname{div}\vec E &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}}$$

statisches elektrisches Feld $\vec E$ ist Quellfeld

Quelle von $\vec E$ ist Ladungsdichte $\rho(\vec r)$, die Feld erzeugt

$\rho(\vec r)$ als Inhomogenität in PDGl. für $\vec E(\vec r)$

Konsequenzen:

1) Potential: $\vec E(\vec r) = -\nabla\varphi(\vec r)$

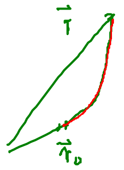
$$\begin{aligned} \vec F(\vec r) &= q\cdot \vec E(\vec r) \\ &= -q\,\nabla\varphi(\vec r) \\ &= -\nabla\left(q\,\varphi(\vec r)\right) \\ &= -\nabla V(\vec r) \end{aligned}$$

$\varphi(\vec r)$ = potentielle Energie von Einheitsladung $q = 1C$ im Feld $\vec E(\vec r)$ an der Stelle $\vec r$

2) Coulombkraft → konservative Kraft → Potential V existiert

⇒ Linienintegral über $\vec E$ wegunabhängig

$$\underbrace{\varphi(\vec r) - \varphi(\vec r_0)}_{= U(\vec r, \vec r_0)} = -\int_{\vec r_0}^{\vec r} \vec E(\vec r')\, d^3r'$$



$$\begin{aligned} U(\vec r, \vec r_0) &= \text{Potentialdifferenz} \\ &= \text{Spannung (in V gemessen)}\end{aligned}$$

als nächstes: Poisson-Gleichung

$$\boxed{\nabla^2\varphi(\vec r) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec r)}$$

da:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\vec E &= \rho/\varepsilon_0 \\ \operatorname{rot}\vec E &= 0 \\ \vec E &= -\nabla\varphi(\vec r)\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \operatorname{div}\vec E &= -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(\vec r) \\ &= -\nabla^2\varphi \\ &= \rho/\varepsilon_0 \end{aligned}$$

Poisson-Gl als Grundgleichung der Elektrostatik

Poisson-Gl als Grundgleichung der Elektrostatik
partielle Dgl für $\varphi(\vec r)$: linear in φ
inhomogen wegen $\varrho(\vec r)$
2. Ordnung wegen $(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) = \nabla^2$

Falls 1) $\varrho(\vec r\,') =$ Ladungsverteilung für alle $\vec r\,'$ gegeben
2) keine Randbedingungen im Endlichen für $\varphi(\vec r)$

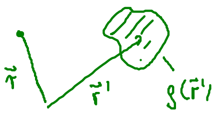
$\Rightarrow$ elementare Lösung

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\varrho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

Nachweis:

$$\nabla^2 \varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \varrho(\vec r\,') \, \nabla_{\vec r}^2 \left(\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|} \right)$$

∇^2 hier $\nabla_{\vec r}^2$

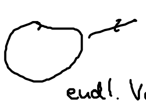


$$= -\frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0} \int d^3r' \, \varrho(\vec r\,') \, \cancel{4\pi} \, \delta(\vec r - \vec r\,')$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(\vec r)$$

Elektrisches Feld $\vec E(\vec r)$ durch weitere Gradientenbildung
$$\vec E = -\nabla \varphi(\vec r)$$

Problemstellungen in Elektrostatik häufig anders



1) $\varrho(\vec r)$ in V gegeben
2) Wert von $\varphi(\vec r)$ bzw Ableitung von φ bei $S(V)$ bekannt

Wie lautet $\varphi(\vec r)$ $\forall\, \vec r$ in V $\rightarrow$ $\vec E$-Feld bestimmbar
"RANDWERTPROBLEM" $\rightarrow$ Kap. 3

äquivalente Darstellung der Maxwell-Gl der Elektrostatik durch Integralversion

$$\mathrm{rot}\, \vec E = 0$$

Stokesscher Satz

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_S \mathrm{rot}\, \vec E \cdot d\vec S = \oint_{C(S)} \vec E \cdot d\vec \ell$$

für beliebige geschl. Kontur C

$$\mathrm{div}\, \vec E = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

$$Q = \int_V \varrho(\vec r)\, dV = \int_V \mathrm{div}(\varepsilon_0 \vec E)\, dV$$

$$\underset{\text{Gaußscher Satz}}{=} \varepsilon_0 \oint_S \vec E \cdot d\vec S$$

insgesamt

$$\boxed{\begin{aligned}\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} &= 0\\ \oint_{S(V)} \varepsilon_0\, \vec{E}\cdot d\vec{S} &= Q\end{aligned}}$$

Q in V bzw. innerhalb von S

"Gaußsches Gesetz"

$$\Phi_e = \varepsilon_0 \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \text{Fluß von elektr. Feld}$$

Fluß von elektr. Feld durch beliebige geschlossene Fläche ist gegeben durch eingeschlossene Ladung

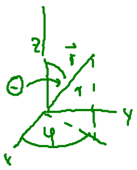
Anwendung des Gaußschen Gesetzes:

nützlich wenn Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ sehr symmetrisch ist

Bsp.: Homogen geladene Kugel mit Radius R

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \text{const} & \text{für } r \le R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

$\vec{E}$-Feld in Kugelkoordinaten



$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_r + E_\Theta(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_\Theta + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_\varphi$$

Drehung von $\rho(\vec{r})$
- z-Achse
- x-Achse
- y-Achse

} invariant

$\Rightarrow$ E_r, E_Θ, E_φ unabhängig von φ, θ, nur von r abhängig

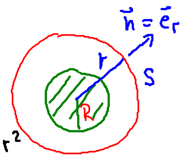
$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\,\vec{e}_r + \underbrace{E_\Theta(r)\,\vec{e}_\Theta}_{=0} + \underbrace{E_\varphi(r)}_{=0}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\,\vec{e}_r$$

gilt bei allen kugelsymmetr. Ladungsverteilungen $\quad \vec{n} = \vec{e}_r$

Gauß: $$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = \oint_S E_r(r)\,\vec{n}\cdot\vec{n}\, dS$$

Oberflächenintegral über "Kugel" von Radius r



$$= E_r(r)\cdot \oint dS$$

$$= E_r(r) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta}_{=4\pi}\, r^2$$

$$\begin{aligned} dS &= r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \\ &= r^2\, d\Omega \\ \int d\Omega &= 4\pi \end{aligned}$$

$$= 4\pi r^2 E_r(r)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot q(V_r)$$

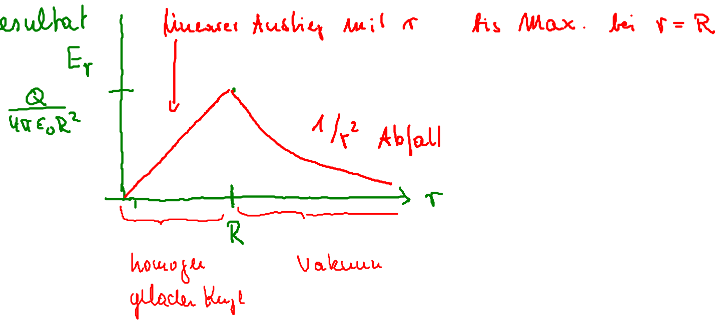
in Volumen V_r ("Kugel" mit Radius r) enthaltene Ladung

$$= \begin{cases} \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & \text{falls } r > R \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0} Q \dfrac{r^3}{R^3} & \text{falls } r < R \end{cases}$$

insgesamt:

$$\vec E(\vec r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\vec e_r \cdot \begin{cases} \frac{1}{r^2} & \text{falls } r>R \\ \frac{r}{R^3} & \text{falls } r<R \end{cases}$$

Resultat



Potential bzw $\vec E$ Feld von N Punktladungen

$$\rho(\vec r) = \sum_{i=1}^{N} q_i\,\delta(\vec r - \vec r_i)$$

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \int d^3r'\,\delta(\vec r' - \vec r_i)\cdot\frac{1}{|\vec r - \vec r'|}$$

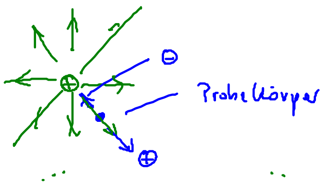
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec r - \vec r_i|}$$

$$\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i\,\frac{\vec r - \vec r_i}{|\vec r - \vec r_i|^3}$$

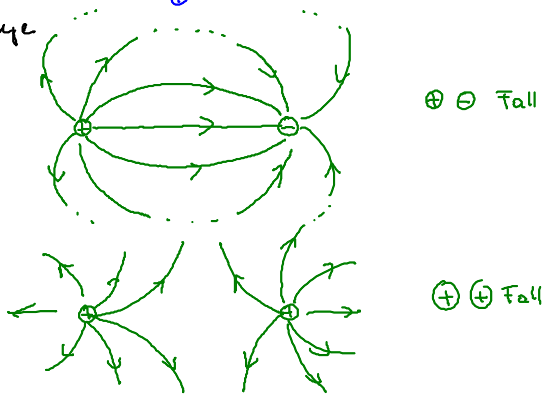
Superposition der Potentiale, $\vec E$-Felder der einzelnen Punktladungen.

Feldkonzept (Qualitativer Bilder)

Feldlinie: Bahn, auf der sich ein kleiner positiver geladener und zunächst ruhender Körper aufgrund von Coulomb WW bzw $\vec E$-Feld via $\vec F = q\vec E(\vec r)$ bewegen würde



Zwei Punktladungen



Feldlinien schneiden sich nicht

Feldlinien starten bei positiven Ladungen und enden bei negativen Ladungen"

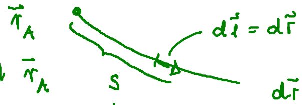
Fernwirkungs vs. Nahewirkungsprinzip

formale Beschreibung von Feldlinien

$\vec E(\vec r)$: Vektorfeld

in jedem Raumpunkt $\vec r$ ein $\vec E(\vec r)$-Wert angeheftet

$E(\vec r)$ aus 'Pfeil' mit Länge und Richtung



Startpunkt $\vec r_A$

Bogenlänge

$d\vec r$, so dass in $\vec E$-Feld-richtung zeigend

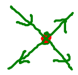
$\vec r = \vec r(s)$

$$\frac{d\vec r}{ds} = \vec E\left(\vec r(s)\right) \qquad \left[\ \frac{d\underline x}{dt} = \dot{\underline x} = \underline F(\underline x, s)\ \right]$$

dyn. System in TE Ph II

$\vec r = \vec r(s)$ als Lösung dieser Vektor-Differentialgleichung

Feldlinien können sich nicht schneiden



Nicht möglich

da jedem Punkt $\vec r$ im Raum nur ein $\vec E(\vec r)$ Wert zugeordnet ist.

gibt es geschlossene Feldlinien für $\vec E$-Feld

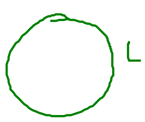
betrachte
$$\oint_C \vec E(\vec r)\cdot d\vec r \underset{\text{Stokes}}{=} \int_S \underbrace{\text{rot}\,\vec E}_{=0}\cdot d\vec S = 0$$
$$\left(\ \oint \frac{d\vec r}{ds}\cdot d\vec r = 0\right.$$

gibt es geschlossene Feldlinie $L = C$

Annahme ja.

Bogenlänge $s \Rightarrow ds^2 = d\vec r^{\,2}$

$$\oint_L \frac{(ds)^2}{ds} = \oint_L ds = 0$$



aber für endlich ausgedehnten L

$\Rightarrow \oint_L ds \neq 0$

$\Rightarrow \nexists$ keine geschlossenen $\vec E$-Feldlinien

Ströme und Ladungserhaltungssatz

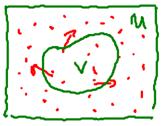
bisher Ladungen im 3d Raum ruhend

aber i. Allg. können Ladungen sich bewegen, strömen

geordnete Bewegung $\rightarrow$ Fließen von Strom

- Stromstärke I
- Stromdichte $\vec j$ (Stromdichtevektor)

- Stromdichte $\vec{j}$ (Stromdichtevektor)



großes Volumen $M+V$
kleines Volumen V

$M+V$ abgeschlossen
V nicht abgeschlossen

in $M+V$: Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$ ← q_i zur Zeit t in $\vec{r}_i(t)$

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \, \delta(\vec{r}-\vec{r}_i(t))$$

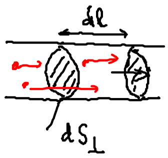
Gesamtladung in $M+V$ konstant

$$Q_{M+V} = \int_{M+V} \rho(\vec{r},t)\, dV = \sum_{i=1}^{N} q_i = \text{const}$$

Gesamtladung in Subvolumen V i. Allg. nicht konstant

$$Q_V = Q_V(t) = \int_V \rho(\vec{r},t)\, dV$$
$$= \sum_i q_i \;, \quad \text{die zur Zeit } t \text{ in } V \text{ sind.}$$

Definition von Stromdichte $\vec{j}$



Volumenelement $dV = dS_\perp\, dl$
im Umgebung von Punkt $\vec{r}$

in dV zur Zeit t ist Ladung

$$dQ = \rho(\vec{r},t)\, dV = \rho(\vec{r},t)\cdot dS_\perp\, dl$$

enthalten

o.B.d.A. dQ positiv → Bewegung der Ladung mit $\vec{v}$
Richtung von $\vec{j}$ = Richtung von $\vec{v}$

dQ negativ → Richtung von $\vec{j}$ zu $\vec{v}$ entgegengesetzt

Betrag von $\vec{j}$

$$|\vec{j}| = \frac{dQ}{dS_\perp \cdot dt}$$

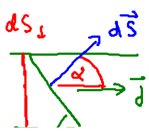
= Quotient von Ladung dQ, die in Zeit dt durch die zu $\vec{v}$ senkrecht liegende Fläche $dS_\perp$ hindurchtritt, und Produkt $dS_\perp\, dt$

$$dQ = \rho\, dV = \rho\, dS_\perp\, dl$$
$$\frac{dl}{dt} = v$$
$$\Rightarrow \quad |\vec{j}| = j = \frac{\rho\, dS_\perp\, dl}{dS_\perp\, dt} = \rho \frac{dl}{dt} = \rho\, v$$

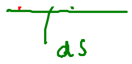
Stromdichte: $\vec{j} = \rho\, \vec{v}$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\cdot v(\vec{r},t)$$

Stromstärke: $dI = \vec{j}\cdot d\vec{S}$



$$dI = j \cdot dS \cos\alpha$$



$$= j \cdot dS_\perp$$

$$= \frac{dQ}{dS_\perp \, dt} \cdot dS_\perp$$

$$= \frac{dQ}{dt}$$

Stromstärke I_S durch Fläche S per Integration

$$I = I_S = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

bewegte Ladungen als Punktladungen

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{v}_i \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

$\vec{v}_i$ = Geschwindigkeit der i-ten Ladung

Ladungserhaltung:

in V ist Ladung $Q_V(t)$ zur Zeit t enthalten
durch $S(V)$ fließt Ladung zu oder ab

$$Q_V(t) - Q_V(t + dt) = I_S(t)\, dt$$

Taylor: $$Q_V(t) - \left[Q_V(t) + \frac{dQ_V(t)}{dt} \cdot dt + \dots \right] = I_S(t)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dQ_V(t)}{dt} + I_S(t) = 0 \qquad \text{(Integrale Version)}$$

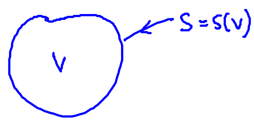
zeitl. Änderung der Ladung in V hervorgerufen durch den
durch S(V) fließenden Strom

Bem: 1) $I_S(t) = 0 \;\; \forall t$ (V abgeschlossen) $\Rightarrow Q_V = \text{konst.}$

2) $Q_V(t) = Q_V(\cancel{t}) \Rightarrow I_S = 0$

differentielle Variante von Ladungsbilanz

$$Q_V = \int_V \rho(\vec{r},t)\, dV$$



$$I_S = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{v} \rho \cdot d\vec{S}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r},t)\, dV + \oint_S \vec{j}(\vec{r},t) \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_V dV \dots \longrightarrow \int_V dV\, \partial_t \dots \qquad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$$

falls V fest vorgegeben, nicht zeitl. veränderlich!

$$\wedge \quad \oint_{S(V)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{j}\, dV$$

$$\wedge \quad \int_V \left(\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} \right) dV = 0$$

gilt für beliebige Volumina V $\Rightarrow$ $(\ldots) = 0$

$\wedge$ $\boxed{\partial_t \rho + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0}$ Kontinuitätsgleichung

zeitl. Änderung der Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$ im Punkt $\vec{r}$ entspricht negativer Divergenz der Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$

$\rho(\vec{r},t)$ und $\vec{j}(\vec{r},t)$ nicht vollständig unabhängig voneinander

Konsequenzen aus $\partial_t \rho + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$

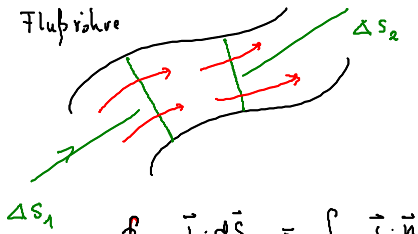
$\vec{j}$ stationär

- $\partial_t \rho = 0$, d.h. ρ auch zeitunabhängig
- $\vec{j}$ zeitunabhängig

$\Rightarrow$ $\mathrm{div}\,\vec{j}(\vec{r}) = 0$

$$\underset{\text{Gauß}}{\Rightarrow} \int_V \mathrm{div}\,\vec{j}(\vec{r})\, dV = \oint_{S(V)} \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$$

Flußröhre



kein Ladungstransport durch Seitenwände nur Durchfluß z.B. durch ΔS_1 und ΔS_2

$$\oint_{S(V)} \vec{j}\cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S_1} \vec{j}\cdot\vec{n}\, dS + \int_{\Delta S_2} \vec{j}\cdot\vec{n}\, dS = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Delta S} \vec{j}\cdot d\vec{S} = \text{konstant für}$$

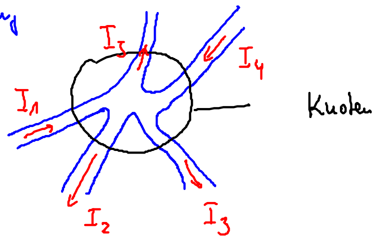
jeden beliebigen Querschnitt ΔS der Flußröhre

Bem: $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$ $\Rightarrow$ Einfluß = Abfluß

$\Rightarrow$ durch jeden Leiterquerschnitt ΔS fließt gleicher Strom

Leiterverzweigung

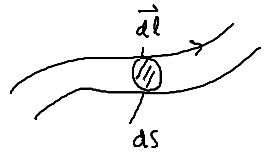
Flußröhre mit Verzweigung



$$\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0 = \sum_n I_n$$ Kirchhoff'sche Knotenregel

Summe der zufließenden Ströme = Summe der abfließenden Ströme

Dünner Leiter bzw. Linienstrom



Idealisierung: unendl. dünner Leiter mit "unendlicher" hoher Stromdichte, wobei aber Gesamtstrom konstant ($< \infty$)

dl infin. Längenelement in Leiterrichtung, d.h. in Stromrichtung

$$\vec{j} \cdot \Delta V = \vec{j} \cdot \Delta S \cdot dl$$

$$d\vec{l} = dl \cdot \frac{\vec{j}}{|\vec{j}|}$$

$\Delta S \to 0$

$$\vec{j}\, dV \to \vec{j}\, dS\, dl = \underbrace{|\vec{j}|\, dS}_{:= I} \cdot \underbrace{\frac{\vec{j}}{|\vec{j}|} \cdot dl}_{= d\vec{l}}$$

$$I = \lim_{\substack{|\vec{j}| \to \infty \\ \Delta S \to 0}} |\vec{j}|\, dS = \text{Linienstrom}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{j}\, dV = I\, d\vec{l}$$

Konzept des Stromfaden / Strom-Filament

analog zu Punktladungskonzept in Elektrostatik
Stromfaden als "linienförmiger" Strom I längs Weg C

Exkurs: Ohmsches Gesetz

elektr. Strom: Kraftwirkung auf Ladungen

$$\vec{F}_i = q_i \vec{E}$$

Zusammenhang Stromdichte $\vec{j}$ und elektr. Feld $\vec{E}$?

Newton $\quad \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i = q_i \vec{E} \qquad (m = 1)$

$$\vec{E} = \text{konst}$$

$$\vec{r}_i(t) = \frac{1}{2} q_i \vec{E} \cdot t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{a}_0$$

permanente Beschleunigung

Im Leiter Vielzahl von Ladungsträgern
Relativ Bewegung
→ Vielzahl von Stöße
→ wirkt im Mittel wie "Reibungskraft"

$$\left.\begin{array}{l} R_+ = -\alpha_+ v_+ \\ R_- = -\alpha_- v_- \end{array}\right\} \text{Reibungskraft auf } \begin{array}{l}\text{positive} \\ \text{negative}\end{array} \text{ Ladungsträger}$$

$$m_\pm \dot{\vec{v}}_\pm = q_\pm \vec{E} - \alpha_\pm v_\pm \qquad \pm \begin{array}{l}\text{positive} \\ \text{negative}\end{array} \text{ Ladungsträger}$$

stationärer Zustand

$$\dot{\vec{v}}_\pm = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_\pm = q_\pm \frac{\vec{E}}{\alpha_\pm}$$

Stromdichte

$$\vec{j} = \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_-$$

$$= \rho_+ q_+ \frac{\vec{E}}{\alpha_+} + \rho_- q_- \frac{\vec{E}}{\alpha_-}$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\rho_+ q_+}{\alpha_+} + \frac{\rho_- q_-}{\alpha_-} \right]}_{=\ \text{spezifische elektrische Leitfähigkeit}\ \sigma} \vec{E}$$

$\sigma > 0$ da $\alpha_+ , \alpha_- > 0$

$\rho_+^2 , \rho_-^2 > 0$

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}} \qquad \text{Ohmsches Gesetz}$$

Bem: 1) Ohm: Gültigkeit setzt voraus daß $|m \dot{\vec{v}}_\pm| \ll |q_\pm \vec{E}|$

$\vec{v}_\pm$ hinreichend klein

2) Aussage von Ohmschen Gesetz:

Stromdichte $\vec{j}$ proportional angelegtem Feld $\vec{E}$

Richtung von $\vec{j}$ in Richtung von $\vec{E}$

3) σ: Materialparameter

Stromdichte + Gesamtstrom:

Ladungsverteilung $\rho = \rho(\vec{r},t)$

zeitliche Änderung der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r},t)$

$$\Rightarrow \partial_t \rho(\vec{r},t) + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r},t) = 0$$

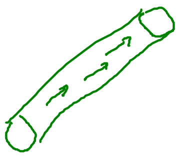
Stromfluß mit Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t) \cdot \vec{v}(\vec{r},t)$$

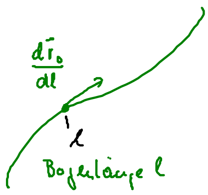
$\leftarrow$ Geschwindigkeit der lokalen Ladungsträger

Gesamtstrom durch Fläche S

$$I = I_S(t) = \int_S \vec{j}(\vec{r},t) \cdot d\vec{S}$$



Stromfaden als Idealisierung



Stromfaden als Linie bzw Kurve $\vec{r}_0(l)$

Kurvenparameter l $\hat{=}$ Bogenlänge

Tangentenvektor $\frac{d\vec{r}_0(l)}{dl}$

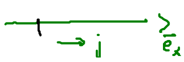
Stromdichte für Stromfaden

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \int I(l,t) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(l)) \cdot \frac{d\vec{r}_0(l)}{dl} \, dl$$

Draht nur in x-Richtung

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \int dx' \; I(x',t) \; \delta(\vec{r} - x'\vec{e}_x) \cdot \vec{e}_x$$

$$= \int dx' \; I(x',t) \; \delta(x-x') \, \delta(y) \, \delta(z) \, \vec{e}_x$$



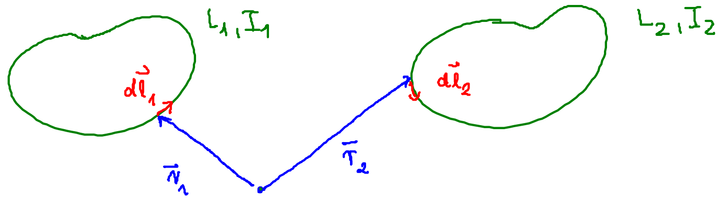
x'

$$= I(x,t)\cdot\delta(y)\,\delta(z)\,\vec{e}_x$$

Amperesches Gesetz:

empirischer Befund: elektrische Ströme wechselwirken miteinander

zwei geschlossene Leiterkreise L_1 und L_2, in denen Ströme fließen



L_1 und L_2 Stromfäden

I_1 und I_2 stationäre Ströme durch L_1 und L_2

$$\vec{F}_{12} = \tilde{k}\, I_1 I_2 \oint_{L_1}\oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_1\times[d\vec{l}_2\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2)]}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}$$

Kraft von L_2 auf L_1

Integration entlang Leiterschleifen

$d\vec{l}_1, d\vec{l}_2$ infinitesimale Linienelemente entlang L_1, L_2

$\vec{r}_1, \vec{r}_2$ Ortsvektoren zu dl_1 und dl_2

Proportionalitätskonstante $\tilde{k}$ (im Vakuum)

- $\tilde{k} = \frac{1}{c^2}$ im cgs System
- $\tilde{k} = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\,\frac{Vs}{Am}$ im SI System ←

μ_0: magnet. Feldkonstante / Permeabilität von Vakuum

μ_0: $4\pi\; 10^{-7}\,\frac{Vs}{Am} = 1{,}2566 \cdot 10^{-6}\,\frac{Vs}{Am}$

RB: $\varepsilon_0\,\mu_0\cdot c^2 = 1$ $\qquad$ c: Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

im Rahmen der Vorlesung:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, I_1 I_2 \oint_{L_1}\oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_1\times[d\vec{l}_2\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2)]}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}$$

Amperesches Gesetz

Bem: 1) proportional zu I_1 und I_2

2) unter Integral typisches Abstandsverhalten wie bei Coulomb

$$\sim \frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3} \quad \text{bzw} \quad \frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2}\cdot\vec{e}_{\vec{r}_1-\vec{r}_2}$$

analog zu Elektrostatik: Feldbeschreibung einführen

Stromkreis L_1 erfährt im von Stromkreis L_2 erzeugten Magnetfeld eine Kraft $\vec{F}_{12}$

Auftrennen von Ampereschem Gesetz:

$$\vec{F} \quad = \oint \quad \frac{\mu_0}{} = \oint \quad d\vec{l}_2\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

$$\vec F_{12} = I_1 \oint_{L_1} d\vec l_1 \times \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint_{L_2} \frac{d\vec l_2 \times (\vec r_1 - \vec r_2)}{|\vec r_1 - \vec r_2|^3}$$

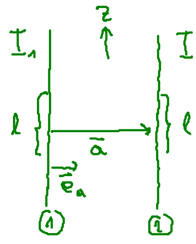
$$= I_1 \oint_{L_1} d\vec l_1 \times \vec B_2(\vec r_1)$$

$$\vec B_2(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint \frac{d\vec l_2 \times (\vec r - \vec r_2)}{|\vec r - \vec r_2|^3}$$

von L_2 erzeugtes Magnetfeld $\vec B_2$ im allgemeinen Raumpunkt $\vec r$

proportional zu felderzeugender Größe, dem Strom I_2

Exkurs: 2 Stromfäden / Leiter (1) und (2)



- unendlich lang
- infinitesimal dünn
- parallel (im ∞ geschlossen)
- in z-Richtung
- Abstand von (1) und (2) $a = |\vec a|$
- führen Strom I_1 und I_2
- üben Kraft aufeinander aus

anziehend für gleichsinnig parallele Ströme
abstoßend für gegensinnig " "

Kraft, die an Leiterstück der Länge l angreift

$$\vec F_{21} \sim I_1 \cdot I_2 \cdot l \cdot \frac{1}{a} \qquad d \qquad \vec F_{21} \parallel \vec a$$

orientierte Strom $I_1 \vec e_z$ bzw $I_2 \vec e_z$

$$\frac{\vec F}{l} \sim \frac{1}{f(a)} \left[I_2 \vec e_z \times (I_1 \vec e_z \times \vec e_a) \right]$$

bac-cab Regel: $\vec e_z \times (\vec e_z \times \vec e_a) = \vec e_z \underbrace{(\vec e_z \cdot \vec e_a)}_{=0} - \vec e_a \underbrace{(\vec e_z \cdot \vec e_z)}_{=1}$

$\vec e_z \perp \vec e_a$

$$\sim - \frac{I_1 I_2}{f(a)} \vec e_a$$

Abstandsfunktion empirisch $\longrightarrow$ ⧄

umgekehrt:

Stromfaden L_2 im Feld von Leiter/Stromfaden L_1
wg Symmetrie gilt

$$\vec F_{21} = I_2 \oint_{L_2} d\vec l_2 \times \vec B_1(\vec r_2)$$

mit Magnetfeld $\vec B_1$ erzeugt von L_1 in beliebigem $\vec r$

$$\vec B_1(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{L_1} \frac{d\vec l_1 \times (\vec r - \vec r_1)}{|\vec r - \vec r_1|^3}$$

Ampèresches Gesetz erfüllt actio = reactio $\quad \vec F_{12} = - \vec F_{21}$!

Nachweis. $\vec{B}_1(\vec{r})$ in $\vec{F}_{21}$ einsetzen
Jacobi Identität aus Physik 1 benutzen

insgesamt

$$\vec{B}_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_i \oint_L \frac{d\vec{l}_i \times (\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

= Magnetische Induktion

= Magnetfeld, magnetisches Feld

Symmetrisierte Version von Ampères Gesetz

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{L_2}\oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_1 \times [d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1-\vec{r}_2)]}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\vec{a} = d\vec{l}_1 \,,\quad \vec{b} = d\vec{l}_2 \,,\quad \vec{c} = \vec{r}_1-\vec{r}_2$$

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{L_1}\oint_{L_2} d\vec{l}_1\, d\vec{l}_2 \,\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}$$

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{L_2} d\vec{l}_2 \oint_{L_1} d\vec{l}_1 \cdot \nabla_{\vec{r}_1} \frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$

letztes Integral $= 0$.

Warum: $\oint_{L_2} d\vec{l}_2 \oint_{L_1} d\vec{l}_1 \cdot \nabla_{\vec{r}_1} \frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} =$

$$= \oint_{L_2} d\vec{l}_2 \int_{S_1} \underbrace{\operatorname{rot}\left(\nabla_{\vec{r}_1} \frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\right)}_{\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \dots)\ \equiv\ 0} d\vec{S}_1$$

Stokesscher Satz

insgesamt symmetr. Version von Ampères Gesetz

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{L_1}\oint_{L_2} d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2 \,\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Verallgem. auf N Leiterschleifen

$$\vec{F} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_0}{4\pi} I_j I \oint_L \oint_{L_j} \dots\dots$$

Superpositionsprinzip der Kräfte

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_0}{4\pi} I_j \oint \frac{d\vec{l}_j \times (\vec{r}-\vec{r}_j)}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}$$

Übergang zu Kontinuumsbeschreibung
Linienströme durch Stromdichten ausdrücken

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int d^3r' \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_j} I_j \frac{d\vec{l}_j \times (\vec{r}-\vec{r}_j)}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3} \cdot \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_j(l))$$

"eine" eingefügt:

$$1 = \int d^3r \; \delta(\vec r - \vec r_j(\ell))$$

δ Fkt auswerten

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\left[I_j \oint \frac{d\vec\ell_j}{d\ell} \cdot \delta(\vec r' - \vec r_j(\ell))\, d\ell \right]}_{= \vec j_j(\vec r') \;=\; \text{Stromdichte des } j\text{-ten Stromfadens}} \times \frac{\vec r - \vec r'}{|\vec r - \vec r'|^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \vec j_j(\vec r')}_{\vec j(\vec r) \;=\; \text{Gesamtstromdichtefeld von allen Stromfäden}} \times \frac{\vec r - \vec r'}{|\vec r - \vec r'|^3}$$

$$\curvearrowright \quad \vec B(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \; \vec j(\vec r') \times \frac{\vec r - \vec r'}{|\vec r - \vec r'|^3} \qquad \text{(Biot-Savart-Gesetz)}$$

Kraftgesetz bzw. Kraft von Magnetfeld B auf Leiterschleife L

$$\vec F = I \oint_L d\vec\ell \times \vec B(\vec r(\ell))$$

$$= I \oint_L d\vec\ell \times \vec B(\vec r(\ell)) \int d^3r \; \delta(\vec r - \vec r(\ell))$$

$$= \int d^3r \; \underbrace{\left(I \oint_L \delta(\vec r - \vec r(\ell)) \right)}_{= \text{ Stromdichte von Leiterschleife } L} \times \vec B(\vec r)$$

$$\curvearrowright \quad \vec F = \int d^3r \; \vec j(\vec r) \times \vec B(\vec r)$$

Kraft von Magnetfeld $\vec B$ auf Schleife L

$\longleftarrow$

Setze $\vec j(\vec r) = \vec j_1(\vec r)$

Stromdichte die B-Feld erzeugt $\vec j_2(\vec r)$

$$\rightarrow \vec F = \int d^3r \int d^3r' \; \vec j_1(\vec r) \times \left[\vec j_2(\vec r') \times \frac{\vec r - \vec r'}{|\vec r - \vec r'|^3} \right]$$

Kraft von Stromverteilung 2 auf Stromverteilung 1

bac-cab Regel

$$= \int d^3r \int d^3r' \left[\vec j_2(\vec r') \left(\vec j_1(\vec r) \cdot \frac{\vec r - \vec r'}{|\vec r - \vec r'|^3} \right) - \frac{\vec r - \vec r'}{|\vec r - \vec r'|^3} \left(\vec j_1(\vec r) \cdot \vec j_2(\vec r') \right) \right]$$

$$= \underbrace{\int d^3r \int d^3r' \left[\vec j_2(\vec r') \left[- \vec j_1(\vec r) \cdot \nabla_{\vec r} \frac{1}{|\vec r - \vec r'|} \right] \right]}_{⊛}$$

$$- \int d^3r \int d^3r' \; \frac{\vec r - \vec r'}{|\vec r - \vec r'|^3} \; \vec j_1(\vec r) \cdot \vec j_2(\vec r')$$

erstes Integral

$$⊛ = \int d^3r \int d^3r' \; \vec j_2(\vec r') \cdot \left\{ \nabla_{\vec r} \cdot \left[-\vec j_1(\vec r) \frac{1}{|\vec r - \vec r'|} \right] + \left(\nabla_{\vec r} \cdot \vec j_1(\vec r) \right) \frac{1}{|\vec r - \vec r'|} \right\}$$

erster Term $\quad \int d^3r \; \nabla_{\vec r} \cdot [\;\;] \xrightarrow[\text{Gauß}]{} 0 \quad$ falls $j_1(\vec r)$ lokalisiert bzw. hinr. schnell für $r \to \infty$ abklingt

zweiter Term $\quad \mathrm{div}\, \vec j_1(\vec r) = 0 \quad$ (Übungsaufgabe) nur zweites Integral im $\vec{F}$ erhalten

$$\vec{F} = - \int d^3r \int d^3r' \; \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \; \vec{j}_1(\vec{r}) \cdot \vec{j}_2(\vec{r}')$$

Wechselwirkende Stromdichten

"lokaler Abstand"

Drehmoment des Magnetfelds auf Stromverteilung

$$\vec{M} = \int d^3r \;\; \vec{r} \times \left[\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \right]$$

nächster Schritt: Grundlegende Gleichungen für magnetisches Feld $\vec{B}(\vec{r})$ ableiten via Helmholtz Theorem: $\operatorname{div} \vec{B} = ?$, $\operatorname{rot} \vec{B} = ?$

Ausgangspunkt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \; \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

im Prinzip nur noch rot bzw div davon bilden.

zunächst Kreuzprodukt umformen

$$\nabla_{\vec{r}} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$\nabla_{\vec{r}}$ auf $\vec{r}$ wirkend

$\vec{j}(\vec{r}')$ nur von $\vec{r}'$ abhängig

benutze:

$$\operatorname{rot}(\vec{A}\varphi) = - \vec{A} \times \operatorname{grad} \varphi + \varphi \cdot \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\nabla_{\vec{r}} \times (\vec{A}\varphi) = - \vec{A} \times \nabla_{\vec{r}} \varphi + \varphi \; \nabla_{\vec{r}} \times \vec{A}$$

$A = \vec{j}(\vec{r}')$ bzgl $\nabla_{\vec{r}}$ wie Konstante $\rightarrow \nabla_{\vec{r}} \times \vec{j}(\vec{r}') = 0$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\nabla_{\vec{r}} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = - \vec{j}(\vec{r}') \times \left[- \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right]$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\vec{r}} \times \int d^3r' \; \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \int d^3r' \; \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{aligned}\right\}$$

Variante von Biot Savart Gesetz

zurück zu $\operatorname{div} \vec{B} = ?$ bzw $\operatorname{rot} \vec{B} = ?$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{div} \operatorname{rot} \int \ldots\ldots = 0 \quad \text{wegen } \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int \ldots$$

$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \ldots$

$$= \overbrace{\operatorname{grad} \operatorname{div} \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \; \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}^{= 0} \quad (*)$$

$$- \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \; \vec{j}(\vec{r}') \underbrace{\nabla^2_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{= -4\pi \, \delta(\vec{r}-\vec{r}')}$$

$$= \cancel{+4\pi} \frac{\mu_0}{\cancel{4\pi}} \int d^3r' \; \vec{j}(\vec{r}') \cdot \delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$= \mu_0 \; \vec{j}(\vec{r})$$

Begründung warum erster Term in $(*)$ $= 0$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \operatorname{grad}\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\underbrace{\nabla_{\vec{r}}\cdot\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

$$= \vec{j}(\vec{r}')\,\nabla_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= \vec{j}(\vec{r}')\left(-\nabla_{\vec{r}'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)$$

wg:

$$-\nabla_{\vec{r}'}\,\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\underbrace{\nabla_{\vec{r}'}\cdot\vec{j}(\vec{r}')}_{\operatorname{div}\vec{j}\;=\;0} - \vec{j}(\vec{r}')\,\nabla_{\vec{r}'}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Kont. Gleichg.

$$= -\vec{j}(\vec{r}')\,\nabla_{\vec{r}'}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

alles in $\nabla\times\vec{B}(\vec{r})$ Gleichg einsetzen, nur ersten Term betrachten

$$\sim -\operatorname{grad}\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\nabla_{\vec{r}}\times\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

benutze Gaußschen Satz $\int dV\,\operatorname{rot}\vec{A} = \oint_{S(V)}\ldots$

$$\vec{A} = \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \longrightarrow 0 \quad \text{für } |\vec{r}-\vec{r}'|\longrightarrow\infty$$

damit erster Term in $\nabla\times\vec{B}(\vec{r})$ Gleichung null.

Insgesamt Grundgleichungen für die Magnetostatik gefunden

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}$$

$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}) \neq \vec{j}(\vec{r},t)$

aus differentieller Version integrale Form bestimmen

$$\int_V \operatorname{div}\vec{B}\,dV \underset{\text{Gauß}}{=} \oint_{S(V)}\vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

magnet. Fluß durch Fläche S einführen

$$\Phi_m = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

Anwendung von Stokes

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{B}\cdot d\vec{S} = \mu_0\int_S \vec{j}(\vec{r})\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{C(S)}\vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I\,, \qquad I = \int_S \vec{j}(\vec{r})\cdot d\vec{S}$$

= Gesamtstrom durch Fläche S

integrale Version der Magnetostat. Gleichungen

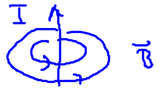
$$\oint_{S(V)}\vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_{C(S)}\vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

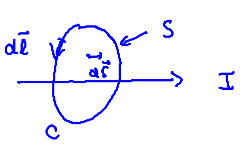
Bem: eventuell: Magnetfeld $\vec{B}$ besitzt keine Quellen $\operatorname{div}\vec{B} = 0$

Magnet. Fluss durch beliebige geschlossene Oberflächen verschwindet

Feldlinien von Magnetfeld B müssen im Endlichen oder Unendlichen geschlossen sein, Magnetfeldlinien haben weder Anfang noch Ende



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}(\vec{r})\cdot d\vec{S}$$ Durchflutungsgesetz / Oerstedsches Gesetz



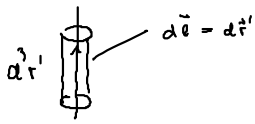
elektr. Strom erzeugt magnetisches Wirbelfeld

Drahtförmige Leiter als Beispiel:

Biot-Savart $$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

vorgegeben

drahtförmige Leiter



Volumenelement d^3r'

$d\vec{r}'$ inf. Linienelement entlang Draht

durch Leiter fließt Strom $I' = \frac{dq'}{dt}$

Fluss von Ladungsträgern durch L'

Ladungsträger haben mittl. Geschwindigkeit $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$

$$\vec{j}(\vec{r}') = \rho(\vec{r}')\cdot\vec{v}'$$

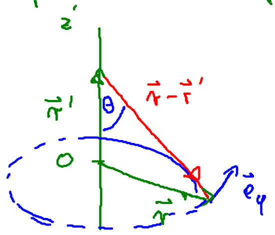
$$dq' = \rho(\vec{r}')\, d^3r'$$

$$d^3r'\, \vec{j}(\vec{r}') = d^3r'\, \rho(\vec{r}')\, \vec{v}' = dq'\cdot\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dq'}{dt}\cdot d\vec{r}' = I'\cdot d\vec{r}'$$

insgesamt:

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L d\vec{r}' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

speziell unendl. langer gerader Draht



2 Symmetrien:

- Rotationssymmetrie um Drahtachse
- Translationssymmetrie längs Drahtrichtung

Integrand: $$d\vec{r}' \times (\vec{r}-\vec{r}') = |d\vec{r}'|\cdot|\vec{r}-\vec{r}'|\cdot\sin\theta\ \vec{e}_\varphi$$
$$= |dz'|\ \rho\ \vec{e}_\varphi$$

$$|\vec{\rho}| = \rho = |\vec{r}-\vec{r}'|\cdot\sin\theta$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{\rho^2+z'^2}$$

$\int^{+\infty}$

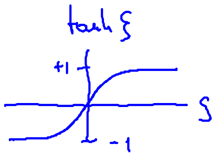
$$\vec B(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot r \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dz' \, (r^2+z'^2)^{-3/2}}_{(*)} \vec e_\varphi$$

$$z' = r \sinh \xi$$

$$dz' = r \cosh \xi \, d\xi$$

$$r^2+z'^2 = r^2 (1+\sinh^2\xi) = r^2 \cosh^2 \xi$$

$$(*) = \frac{1}{r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\cosh^2 \xi} = \frac{1}{r^2} \tanh \xi \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{r^2}$$



$$\Rightarrow \boxed{\vec B(\vec r) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{r} \vec e_\varphi}$$

Magnetfeldlinien: konzentrische Kreise um Draht mit Ebene $\perp$ Draht

Feld $\vec B(\vec r)$ fällt mit $\frac{1}{r}$ mit Abstand r vom Draht ab.

Anmerkungen zu stationären Strömen / Stromdichten:

$\vec j = \vec j(\vec r)$ nicht explizit t-abhängig

$\rightarrow$ zeitlich konstanter Magnet

stationärer Strom / Dauerstrom

$\hat=$ kontinuierl. zeitl. unveränderlicher Fluss von Ladungen <u>ohne</u> Ladungsanhäufung

$\Rightarrow$ <u>eine</u> bewegte Punktladung $\rightarrow$ kein stationärer Strom

$$\rho(\vec r,t) = q\, \delta(\vec r - \vec r_L(t)) \quad \Rightarrow \quad \partial_t \rho \neq 0$$

stationärer Strom: kollektiver Effekt, Strom überall gleich im Draht. $\Rightarrow \partial_t \rho = 0$

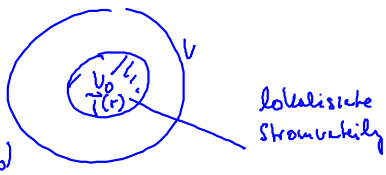
$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec j = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec j(\vec r) = 0 \quad \text{in Magnetostatik}$$

weiter gilt (Übungen)

$$\int_V dV \, \vec j(\vec r) = 0$$

falls $S(V)$ vollst. außerhalb $S(V_0)$



Vektorpotential zu $\vec B(\vec r)$

$$\operatorname{div} \vec B = 0$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} (\ldots) = 0 \quad \text{stets}$$

$$\vec B(\vec r) := \operatorname{rot} \vec A(\vec r)$$

$\vec A(\vec r)$: Vektorpotential, magnet. Potential

$$\vec B(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \int d^3r' \, \frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$$

Biot-Savart

$\curvearrowright \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Eichfreiheit:

$f(\vec{r})$ beliebig, Skalarfeld

rot grad $(\ldots) = 0$

$\vec{A}(\vec{r}) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \text{grad}\, f(\vec{r})$

$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \text{rot}\, \vec{A}(\vec{r}) = \text{rot}\, \vec{A}'(\vec{r})$

geschlossene Feldgleichung für $\vec{A}(\vec{r})$

$\text{div}\, \vec{A}(\vec{r}) = \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \nabla_{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$\nabla_{\vec{r}'} \vec{j}(\vec{r}') = \text{div}\, \vec{j} = 0$

nach $\vec{r}'$ diff. $\rightarrow$ Wechsel der Diff. variablen bei $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \rightarrow$ Vorzeichenwechsel

$$\text{div}\, \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \nabla_{\vec{r}'} \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \, \text{div}\, \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S(V)} d\vec{S} \, \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$= 0$ falls $\vec{j}(\vec{r}')$ lokalisiert in V_0

falls $\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \rightarrow 0$

$\Rightarrow \quad \text{div}\, \vec{A}(\vec{r}) = 0$

$\text{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$

$\text{rot rot}\, \vec{A} = \text{grad}\, \underbrace{\text{div}\, \vec{A}}_{=0} - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$

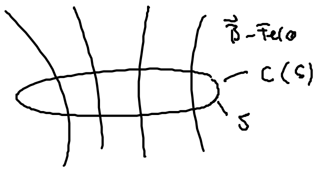
$\Rightarrow \quad \nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r})$

vektorwertige Poissongleichung für $\vec{A}$ als Grundgleichung der Magnetostatik

- linear, inhomogen $\sim \vec{j}(\vec{r})$

Übergang zu zeitabhängigen Ladungsdichte bzw Stromdichten

Verallgemeinerung der Grundgleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ auf zeitlich veränderliche Felder



Magnet. Fluß durch Fläche S

$$\phi_m = \int_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

$$= \int_S \text{rot}\, \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

$$\overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{C(S)} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

$$= \phi_m(S)$$

ϕ_m abhängig von $\vec{A}$, das noch Eichfreiheit besitzt

ϕ_m abhängig von $\vec{A}$, das nach Eichfreiheit beliebt

$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla f \quad \Rightarrow \quad \phi_m(S) = \oint_C \left(\vec{A} + \nabla f\right) \cdot d\vec{\ell}$

$$= \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} + \underbrace{\oint_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{\ell}}_{=0}$$

experimentelles Faktum:

zeitliche Änderung des magnet. Flusses erzeugt elektrische Spannung U im Rand C, die der zeitlichen Änderung von ϕ_m proportional ist

$$-k \frac{d\phi_m}{dt} = U \qquad \text{(Faradaysches Induktionsgesetz)}$$

$k = 1$ für SI, $k = 1/c$ für cgs

Randspannung U:

$$U = \oint_C \vec{E}(\vec{r},t) \cdot d\vec{\ell}$$

$$-\dot{\phi}_m = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}(\vec{r},t) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E}(\vec{r},t) \cdot d\vec{\ell}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}(\vec{r},t) \cdot d\vec{S} \underset{\text{Stokes}}{=} \int_S \operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) \cdot d\vec{S}$$

Fläche S zeitlich ungeändert lassen, sonst beliebig

$$\int_S \left[\partial_t \vec{B}(\vec{r},t) + \operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t)\right] \cdot d\vec{S} = 0$$

$\Rightarrow [\dots] = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{rot}\vec{E} = -\partial_t \vec{B}}$$

Induktionsgesetz $\Rightarrow$ Zusammenhang $\vec{E}$ und $\vec{B}$

vorläufige noch nicht korrekte Version der zeitl. Erweiterten statische Feldgleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$

$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$	Coulomb
$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	Ampère
$\operatorname{rot}\vec{E} = -\partial_t \vec{B}$	Faraday
$\operatorname{div}\vec{B} = 0$	keine Monopole
$\partial_t \rho + \operatorname{div}\vec{j} = 0$	Kontinuitätsgleichung

nicht widerspruchsfrei

Ampère-Gesetz nicht mit Ladungserhaltung kompatibel, da

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B}(\vec{r},t)\right) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r},t)$$

$\operatorname{div}\operatorname{rot}(\dots) = 0$ stets

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r},t) \equiv 0$$

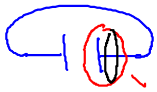
$$\partial_t \varrho + \nabla \vec{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t \varrho \equiv 0$$ Widerspruch!

Ladungserhaltung

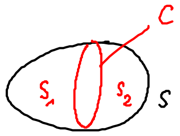
Integraldarstellung von Ampèreschem Gesetz

$$\oint_{C(S)} \vec{B}(\vec{r},t) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{j}(\vec{r},t) \cdot d\vec{s}$$

Plattenkondensator als Modellsystem



virtuelle Kugel um Platte



geschlossene Kurve C, die Kugeloberfläche in 2 Teile teilt S_1, S_2

$$\underbrace{\int_C \vec{B}(\vec{r},t) \cdot d\vec{\ell}}_{\text{Integral über } C} = \mu_0 \int_S \vec{j}(\vec{r},t) \cdot d\vec{s}$$

Integral über von C berandete beliebige Fläche z.B. S_1 oder S_2

Kondensator laden, dann sich selbst überlassen

→ Strom durch Verbindungsdraht um ursprünglichen Ladungsunterschied auf Platten auszugleichen

⇒ Integral auf r.h.s. → entweder $S_1 \rightarrow I(S_1)$
oder $S_2 \Rightarrow I(S_2) = 0$

es fehlt Term in Ampère Gleichung → Maxwell-Term

betrachte zeitlich period. Ladungsverteilung

$$\varrho(\vec{r},t) = \varrho(\vec{r}) \cdot \cos \omega t$$

$$\partial_t \varrho(\vec{r},t) = -\varrho(\vec{r})\, \omega \sin \omega t$$

$$|\partial_t \varrho| \leq |\varrho(\vec{r}) \cdot \omega|$$

wäre $|\varrho(\vec{r})\, \omega| \simeq 0$ langsam veränderl. Ladungsverteilung

quasistationärer Strom →

$$|\partial_t \varrho| \simeq 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

allgemeiner:

$$\varrho(\vec{r},t) = \varrho(\vec{r})\, f(t)$$

$$|\partial_t f(t)| \simeq 0$$

widerspruchsfreie Verallgemeinerung von Ampère Gesetz

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{f}(\vec{r},t) \quad , \quad \vec{f}(\vec{r},t) \text{ gesucht}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{B} = \nabla \cdot \vec{f}(\vec{r},t) = 0$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} (\ldots) = 0$$

⇒ $\vec{f}(\vec{r},t)$ muß erfüllen

1) $\operatorname{div} \vec{f} = 0$
2) quasistat. Limes $\longrightarrow$ Ampèresches Gesetz

Bsp.: $\vec{f}(\vec{r},t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r},t) + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}(\vec{r},t)$
erfüllt alle Anforderungen.

Nachweis:

zu 1) $$\nabla \cdot \vec{f}(\vec{r},t) = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r},t) + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}$$
$$= \mu_0 \underbrace{\left[\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r},t) + \partial_t \rho(\vec{r},t)\right]} \quad = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r},t)$$
$$= 0 \quad \text{da} \quad \text{Kontinuitätsgleichung (Ladungserhaltung)}$$

zu 2) $\mu_0 \partial_t \rho \simeq 0$
$$\Rightarrow \partial_t \nabla \cdot \vec{E} \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \partial_t \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t \vec{E} \simeq 0$$

insgesamt Grundgleichungen der Elektrodynamik konstruiert!